

MANS6
1. písemná zkouška 5.6.2008

V úlohách uveďte srozumitelný postup řešení, výsledky musí být zdůvodněny.

1. Určete objem tělesa ležícího v 1. oktantu ($x, y, z \geq 0$) a omezeného plochami
 $z = 2x + y + |x - y|$, $x + y = 2$. 25 b

2. Bernoulliova lemniskáta je křivka popsána rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.
Načrtněte její graf s použitím polárních souřadnic.
a) Určete užitím dvojnásobného integrálu obsah té části roviny, která je omezena touto křivkou.
b) Určete užitím dvojnásobného integrálu obsah té části roviny, která je omezena touto křivkou a
leží vně kruhu se středem v počátku $[0, 0]$ a poloměrem $R = 1$. 25 b

3. Určete lokální a absolutní extrémů funkce $f : f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$
definované v kruhu $x^2 + y^2 \leq 10$. Své tvrzení zdůvodněte. 25 b

4. Určete délku stran a, b, c trojúhelníku, který má obvod 18 a maximální možný obsah a své
tvrzení zdůvodněte.
Návod - Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku se stranami a, b, c :
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$
 25 b

Celkem 100 b

*Pro úspěšné hodnocení testu je třeba získat alespoň 60 bodů, z toho alespoň 25 bodů z úloh 1.-2.,
a alespoň 25 bodů z úloh 3.-4.*